Re $\left\{f(z)/z\right\}>0$ なる函数族の廻転定理に就いて

吉 開 利 秋

（昭和41年9月30日受理）

T·H·MacGregor〔1〕は $|z|<1$ で $\mathrm{Re}f'(z)>0$ なる函数族 R の凸型限界，其の他若干の結果を報告している。今之等の結果を利用すれば，容易に次の定理の証明が出来る。

〔定理〕

$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ は $|z|<1$ で正則，

且 $\mathrm{Re}\left\{\dfrac{f(z)}{z}\right\}>0$ とすれば

$$\left|\arg \frac{z\cdot f'(z)}{f(z)}\right| \leqq \sin^{-1}\frac{2|z|}{1-|z|^2} \qquad \left(|z|\leqq\sqrt{2}-1\right)$$

が成立する。

証明）

$$\frac{f(z)}{z}=g(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^{n-1}$$ は $|z|<1$ で正則且 $\mathrm{Re}\,g(z)>0$

故に $|\alpha|<1$ を満足するような任意の複素数に対して，

$\mathrm{G}(z)=\mathrm{g}\left(\dfrac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right)$ を考えれば，

$\mathrm{G}(z)$ は $|z|<1$ で正則且 $\mathrm{Re}\,\mathrm{G}(z)>0$ となる。

$\mathrm{G}(z)$ の Taylor 展開は，

(1) $\mathrm{G}(z)=g(\alpha)+g'(\alpha)(1-|\alpha|^2)z+\cdots\cdots\cdots\cdots(|z|<1)$

C. Caratheodory の定理〔2〕より，(1)から

$|g'(\alpha)(1-|\alpha|^2)|\leqq 2|g(\alpha)|$

(2) $\therefore \left|\dfrac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}\right|\leqq\dfrac{2}{1-|\alpha|^2}$

又 $\dfrac{z\cdot f'(z)}{f(z)}=1+\dfrac{z\cdot g'(z)}{g(z)}$ となるから，(2)より

(3) $\left|\dfrac{z\cdot f'(z)}{f(z)}-1\right|=\left|\dfrac{z\cdot g'(z)}{g(z)}\right|\leqq\dfrac{2|z|}{1-|z|^2} \qquad (|z|<1)$

$\therefore \dfrac{z\cdot f'(z)}{f(z)}$ は1を中心として半径 $\dfrac{2|z|}{1-|z|^2}$ の円内に入る。

（3）より

$$1-\frac{2|z|}{1-|z|^2} \leqq \mathrm{Re}\left\{\frac{z\cdot f'(z)}{f(z)}\right\} \leqq 1+\frac{2|z|}{1-|z|^2}$$

今 $1-\dfrac{2|z|}{1-|z|^2}=\dfrac{1-2|z|-|z|^2}{1-|z|^2} \geqq 0$ なるとき

（4）　即ち $|z| \leqq \sqrt{2}-1$ のとき，

$\mathrm{Re}\left\{\dfrac{z\cdot f'(z)}{f(z)}\right\} \geqq 0$ となる。

∴（4）の条件で $\left|\arg\dfrac{z\cdot f'(z)}{f(z)}\right|$ の範囲を求めると，

$$\left|\arg\frac{z\cdot f'(z)}{f(z)}\right| \leqq \sin^{-1}\frac{2|z|}{1-|z|^2}$$

今特別な函数 $f(z)=\dfrac{z+z^2}{1-z}$ $\left(|z|<1 \text{ で正則且 } \mathrm{Re}\left\{\dfrac{f(z)}{z}\right\}>0\right)$

に対して，

$$\left|\frac{z\cdot f'(z)}{f(z)}-1\right|=\left|\frac{2z}{1-z^2}\right| \leqq \frac{2|z|}{1-|z|^2}$$

となり（等号は $z<1$ を満足する z の実数値に対して成立する），

（3）の不等式はこれ以上改良できない。

文　　献

〔1〕 T・H・MacGregor, Functions whose derivative has a positive real part, Trans. Amer. Math. Soc., 104 (1962), P. P. 532—537.

〔2〕 小松勇作，等角写像論（上巻），共立出版，1944.